INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

MICHÈLE ARTIGUE
RÉGINE DOUADY
LUIS MORENO
PEDRO GÓMEZ (EDITOR)

una empresa docente

Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Bogotá, 1995

5

La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento

Régine Douady

INTRODUCCIÓN

En este capítulo me intereso por la relación entre aquello que el profesor se propone enseñar en matemáticas y aquello que los estudiantes, a quienes él se dirige en clase, son susceptibles de aprender efectivamente. Las palabras *enseñanza, aprendizaje y conocimiento* pueden tomar diversos significados. A continuación precisaré el que les doy.

La elaboración de un problema es un paso de una *ingeniería didáctica*. En este contexto, el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un *profesor-ingeniero*, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la ingeniería didáctica es a la vez un **producto**, resultante de un análisis a priori, y un **proceso** en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase. Me interesan los diferentes factores que rigen la elaboración de una in-

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación*

geniería didáctica, y su interdependencia. Vale anotar que cada uno de dichos factores se someten a restricciones a menudo contradictorias.

La ingeniería didáctica designa, de igual forma, una metodología de investigación particularmente interesante por tener en cuenta la complejidad de la clase. Este método se desarrolla mucho en las investigaciones francesas. Para mayores detalles aconsejamos al lector remitirse al capítulo de M. Artigue en este volumen.

En el presente capítulo no pretendo dar cuenta de una investigación, sino más bien describir dos ejemplos de propuestas de enseñanza que corresponden a selecciones didácticas analizadas, argumentadas y justificadas en investigaciones. Todo el trabajo de construcción, análisis y previsión se basa en un cuestionamiento didáctico. También pondré de manifiesto los conceptos didácticos que utilizo. Espero que los ejemplos expuestos no sean tomados como modelos de enseñanza, sino como un apoyo para comprender el sentido y la funcionalidad de las herramientas didácticas propuestas. De igual forma, espero poder ponerlas a disposición de otros profesores para construir y administrar en clase otras ingenierías, y para ayudarles a indagar y administrar mejor sus márgenes de maniobra. En este capítulo, más bien, nos vamos a ocupar de las relaciones entre la *construcción de significado* y la *capitalización o apropiación del conocimiento* por parte de los estudiantes, de su importancia para el profesor y del papel que él les hace jugar a través de las realizaciones didácticas que los estudiantes van a vivir bajo la dirección del profesor.

No obstante, con respecto a los análisis y proposiciones anunciados surge una pregunta crucial, de orden sociológico, que condiciona el sentido de las acciones didácticas posibles: ¿Cuál es el lugar del conocimiento escolar para el profesor y para los estudiantes? ¿Se trata de una manifestación de la relación didáctica? En la vida real, se sabe claramente que la respuesta a estos interrogantes es compleja y no se puede expresar en términos de “todo o nada” o de “sí o no”. Sin embargo, a continuación escogí indagar y presentar los diferentes casos según la tendencia principal.

En la primera parte, examino los efectos sobre las selecciones y decisiones de los profesores que tiene el hecho de que el conocimiento matemático sea o no la principal manifestación de la relación didáctica. En la segunda parte, describo un ejemplo de realización didáctica en el transcurso de la cual la relación con el conocimiento matemático evoluciona. Finalmente, presento un ejemplo de elaboración de un problema de álgebra sobre la factorización y el desarrollo de expresiones. Como conclusión, reagrupo los elementos esenciales de la evolución del conocimiento en los estudiantes.

El conocimiento matemático en la relación didáctica

¿Qué significa saber matemáticas? ¿Qué significa aprender?

En el momento en que un profesor se encuentra con sus alumnos en el salón de clase, se estipula que el maestro está allí para enseñar un conocimiento determinado y los estudiantes para aprender este mismo conocimiento. A continuación preciso el significado que doy a las palabras *conocimiento, enseñanza y aprendizaje*.

Saber matemáticas implica dos aspectos. Por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de algunas nociones y teoremas matemáticos para resolver problemas e interpretar nuevas situaciones. En un funcionamiento científico como éste, las nociones y teoremas matemáticos involucrados tienen un status de **herramientas**. Las herramientas están inscritas en un contexto, que a su vez está influido por *alguien* (o un grupo) en un *momento determinado*. Las situaciones o los problemas en los cuales evolucionan las nociones matemáticas generan **significado** para esas nociones desde un punto de vista que llamaremos *semántico*.

Saber matemáticas también significa identificar las nociones y los teoremas como elementos de un corpus reconocido social y científicamente. Al mismo tiempo es formular definiciones, enunciar los teoremas de ese corpus y demostrarlos. Por esto, las nociones y los teoremas matemáticos en cuestión tienen un status de **objeto**. Están descontextualizados, despersonalizados (a pesar de que tengan un nombre propio) y son atemporales. El trabajo de descontextualización y despersonalización participa en el proceso de **capitalización o apropiación del conocimiento**.

El trabajo de recontextualización y el tratamiento de los problemas que de allí se desprenden permite expandir el significado. Este no impide que se capitalicen prácticas o conocimientos particulares, así sean provisionales. Las nociones, al igual que los teoremas, se pueden trabajar y modificar según las situaciones donde se necesitan. De allí se puede desembocar en nuevas nociones, que a su vez se convierten en materia de trabajo, interpretación, modificación, generalización, etc. En el caso de los teoremas, se puede explorar el dominio de validez al imaginar las variantes, demostrarlas, o, por el contrario, construir los contra-ejemplos para asegurarse de que eso no es posible... En todos los casos se llega a relacionar nociones diferentes. El hecho de relacionarlas es a su vez una fuente de significado para quienes las realizan.

Este trabajo matemático puede hacerse tanto sobre las herramientas en el marco de un problema, como sobre los objetos para expandir en ellos el hecho de haberlos traído a escena sin una finalidad precisa o por placer estético. Se necesita respetar un conjunto de reglas internas de las matemáticas y *diferentes modos de expresión*. Esto se refiere a una componente del significado que llamaremos *sintáctica*.

Para un profesor, *enseñar* se refiere a la creación de las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes. Para un estudiante, *aprender* significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final es la disponibilidad de un conocimiento con su doble status de herramienta y de objeto. Para que haya aprendizaje y enseñanza, es necesario que el conocimiento sea un objeto importante, casi esencial de la interacción entre el profesor y sus alumnos, es decir, que el conocimiento sea una manifestación importante de los "juegos" de la escuela.

La realidad puede ser efectivamente esa, y en ese caso el trabajo del profesor consiste en escoger formas de presentación del conocimiento aceptables para los estudiantes y eficaces con relación al objetivo del aprendizaje. Varias formas de hacerlo son posibles. Sin embargo, la realidad puede ser otra. El conocimiento puede ser una manifestación de la interacción mencionada para el profesor, pero no del todo para un cierto número de estudiantes o, al contrario, ser una manifestación para algunos estudiantes y puede no serlo para el profesor. Entonces, dos elementos van a influenciar las decisiones del profesor y de todas maneras, modular sus logros:

- ¿Qué representa para esos estudiantes el hecho de ir al colegio? ¿Qué esperan ellos del colegio? ¿Qué significa aprender?

- ¿Cuál es la proporción de estudiantes para quienes el conocimiento no es una manifestación de las relaciones escolares? (¿Y para cuáles sí lo es?)

En una misma clase se puede presentar el caso de que algunos estudiantes vengan al colegio para adquirir conocimientos, mientras que otros buscan pasar de clase en clase y llegar lo más lejos posible para tener una buena carrera profesional. Otros llegan a clase para aprender a vivir, a socializarse y a desenvolverse en la vida. Poco importa lo que se haga allí con las matemáticas o con cualquier otra cosa. La disciplina es el sustento de la comunicación con el profesor para responder a sus exigencias, con el mínimo esfuerzo posible (B. Charlot y E. Bautier, 1993).

Sin embargo, sin importar cuáles sean las intenciones al llegar al colegio, cada alumno va más o menos a tener éxito o a fracasar en su proyecto. Del otro lado, según la historia personal del profesor, su propia representación y su propio conocimiento de las matemáticas, su concepción del aprendizaje de las matemáticas, su voluntad de convencer y la fuerza de las restricciones a las cuales está sometido, él intentará defender y hacer valer sus convicciones o, por el contrario, tratará tan sólo de sobrevivir. ¡Y en algunos casos no lo hará del todo mal!

De esta manera, el profesor cuenta con dos posibilidades que podrá utilizar efectivamente o que podrá moldear según las circunstancias: mantener su exigencia sobre el conocimiento como manifestación de su relación con los estudiantes, o renunciar a ella. Esta última es la situación que contemplaremos en el apartado siguiente.

El conocimiento matemático no es una manifestación de las relaciones didácticas ni para el profesor ni para los estudiantes

En este caso, para que el profesor pueda realizar su práctica docente y para que los estudiantes puedan cumplir su papel de alumnos, la clase se restringe a la vivencia de una *ficción didáctica* donde el profesor "enseñará" cualquier cosa y los estudiantes la "aprenderán". Estos últimos tendrán evaluaciones y notas aceptables en su conjunto. Pero ¿dónde se encuentran las matemáticas? ¿Qué puede hacer el profesor? Una respuesta usual es la siguiente: proponer a los estudiantes ejecutar tareas, que se dividen en sub-tareas más elementales, algoritmizadas según las necesidades de los estudiantes. Esta labor continúa hasta el momento en que un porcentaje aceptable de estudiantes haya respondido de manera satisfactoria.

La consecuencia de una opción de este tipo está en que el sentido de la actividad matemática se sacrifica. Los estudiantes no cuentan con otro medio de controlar su producción que con la reelaboración del trabajo en los mismos términos. La experiencia de los profesores muestra que un control así definido es poco confiable. Por otro lado, la legitimidad misma del control se pone en cuestión. Como la función del maestro es corregir, entonces el aspecto mágico se torna racional. Cada vez más se apela a la memoria, pero con pocas posibilidades de estructurarla. El hecho de recurrir a ejercicios repetitivos se vuelve un problema inmanejable. Los estudiantes comprenden cada vez menos por qué se les obliga a hacer matemáticas. Sin duda, en estas condiciones hay que parcelar el conocimiento y algoritmizarlo cada vez más. A pesar de esto, el profesor podrá hacer avanzar sus lecciones. Si se escogen adecuadamente las pruebas de evaluación (compuestas por preguntas pequeñas como de costumbre) más estudiantes podrán pasar al curso superior. Tanto para los estudiantes como para el profesor, está asegurada la supervivencia. Falta por considerar la suerte de los estudiantes que se niegan a entrar en este juego o la de aquellos que fracasan a pesar de su buena voluntad.

El conocimiento matemático es una manifestación de las relaciones didácticas para el profesor pero no para los estudiantes

En este caso se pueden presentar dos eventualidades, al menos al comienzo del año escolar: el profesor acepta entrar en la lógica de los estudiantes y, al menos provisionalmente, se empeña de forma progresiva en hacer evolucionar el contrato; o el profesor aborda desde el comienzo el conflicto con los estudiantes.

En este caso se trata de que el profesor obtenga una modificación de la relación de la mayoría de los estudiantes de la clase con las matemáticas. Por lo tanto, esto puede convertirse en un gran desafío para el profesor quien va a verse involucrado, a través de las matemáticas, en un proceso de modificación de las relaciones con el colegio, entre profesor y estudiantes y entre estudiantes mismos.

En efecto, una modificación de las relaciones de estos estudiantes con las matemáticas implica que los contenidos de esta disciplina y la disponibilidad de herramientas de manejo bajo su control tomen un significado diferente. Esto requiere que los estudiantes puedan entrar en una actividad intelectual y que ellos estén convencidos de que esto vale la pena, no sólo desde el punto de vista de su inserción en la escuela, sino también desde un punto de vista social y cultural. Lo anterior quiere decir que el profesor involucra a los estudiantes en una situación donde tienen opciones entre las cuales elegir, que tienen que probar sus efectos, controlarlos, y eventualmente volver sobre las primeras opciones y reelaborar otras, etc. El profesor debe, por lo tanto, asegurarse de que sus estudiantes dispongan de un mínimo de medios para hacer esto. Lo anterior significa que en el nivel del contrato, los estudiantes aceptan involucrarse en el papel de actor y no se refugian en el papel único de ejecutores. En este contexto de aprendizaje, el profesor no puede definir el *juego de la devolución* (G. Brousseau, 1990). Para Brousseau, *"La devolución es el acto por el cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema, y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia"*.

Más adelante volveré sobre las condiciones favorables para la realización de un contrato de este tipo. En particular es importante hacer caer en cuenta desde muy temprano y durante varios años *la interacción necesaria entre la toma de significado y la capitalización del conocimiento*. M.J. Perrin trabajó en particular este problema con estudiantes de sectores populares en dificultad. Por el momento digamos que este caso impone una situación difícil de manejar y de hacer avanzar con estudiantes que han adoptado la costumbre, en el transcurso de años de fracaso, de rechazar el juego matemático.

Entonces, el profesor puede intentar jugar en la dimensión afectiva. Esto puede funcionar momentáneamente, tal vez un año, con éxito relativo dependiendo de las edades de los estudiantes. Sin embargo, no existe la estabilidad suficiente para asegurar la construcción de una masa crítica de conocimientos adecuados para fijar una nueva relación con las matemáticas. La tentación de renunciar al conocimiento y de caer en un aprendizaje de técnicas más o menos memorizadas es atractiva para el maestro. Empero, esta opción aleja a los estudiantes de aquello que podría tener significado para ellos.

El conocimiento matemático es una manifestación de las relaciones didácticas para algunos estudiantes, pero no para el profesor

No hay que pasar por alto el riesgo de decepcionar a algunos estudiantes que vienen al colegio a aprender algo, interesados en las matemáticas por ser el objeto de la enseñanza. Estos alumnos pueden rechazar el curso de matemáticas y también el colegio, ya que resienten implícitamente que no cumpla con su función. Ellos pueden buscar el conocimiento u otros centros de interés si tienen la posibilidad, para bien o para mal, o pueden entrar en conflicto con los profesores. Esta situación no es utópica.

El conocimiento matemático es una manifestación de las relaciones didácticas para el profesor y para los estudiantes

Esta es una situación favorable desde el punto de vista de las matemáticas. Sin embargo, la construcción de significado no implica necesariamente la apropiación del conocimiento. Bajo algunas condiciones, tal construcción favorece la estructuración, que es la condición para que se pueda memorizar. Entonces, todo el trabajo debe encaminarse hacia el logro de tal efecto.

La teoría de los campos conceptuales (G. Vergnaud, 1991), la teoría de las situaciones (G. Brousseau, 1987, 1990), la dialéctica herramienta-objeto, los juegos de cuadros y ventanas conceptuales (R. Douady, 1984, 1987, 1992), las representaciones metacognitivas (A. Robert y J. Robinet, 1989) son las herramientas para la comprensión y organización de las relaciones con el conocimiento matemático de los diferentes actores del sistema didáctico, y para ayudar a los estudiantes en su esfuerzo por conceptualizar la realidad.

Algunas de las muchas preguntas didácticas quedan abiertas y los problemas de adecuación entre lo que se enseña, de una parte, y lo que se aprende efectivamente, de la otra, distan de estar reglamentados. Lo anterior conduce a mirar los estudios realizados y los resultados obtenidos con modestia y optimismo a la vez.

Los dos ejemplos de ingeniería que se presentan a continuación se realizaron en distintas clases. Su construcción y realización, los análisis preliminares y los análisis a posteriori fueron objeto de estudio en una situación de formación de profesores y de formación de formadores. Es así como se encontrarán en las páginas siguientes los elementos del análisis a priori y, de vez en cuando, referencias a las realizaciones didácticas.

CÁLCULO MENTAL EN SEGUNDO ELEMENTAL

CRÓNICA

Las *circunstancias*

La historia tiene lugar en una escuela en las afueras de una urbanización de interés social, donde habitan en su mayoría familias en situación social y económica difícil. El profesor acaba de ser nombrado en esta escuela. Sin embargo, es un profesor experimentado, miembro de nuestro equipo de investigación en didáctica de las matemáticas en la escuela elemental, desde hace algunos años. El entró en contacto con su nueva clase en septiembre y comenzó a relacionarse con sus 24 estudiantes de la forma como comúnmente lo hacía. Se dio cuenta muy pronto de que 11 de los 24 estudiantes no podían leer un texto relativamente sencillo, pues no habían comprendido el principio de la articulación de las sílabas. Asociado a esto, ellos también tenían dificultades para escribir. En estas condiciones, ¿cómo hacer matemáticas?

Un buen punto de partida posible era el cálculo mental. Esta es una actividad matemática esencialmente pensada, cuyas secuencias son, en general, cortas y periódicas (todos los días cerca de 10 minutos). En efecto, éste es un proceso que en realidad evoluciona con el tiempo. Su expresión es principalmente oral, con un pequeño espacio para lo escrito, el cual podría obviarse desde el principio en algunos casos particulares. Esta es de antemano una buena estrategia de acceder a lo escrito, como veremos más adelante. El profesor cuenta con una experiencia previa considerable sobre cómo las operaciones mentales son un método para contribuir a la conceptualización de los números y de sus propiedades para hacer operaciones. Es un camino que nos parece muy adecuado para las dificultades de la clase, y que daba esperanzas a la experiencia.

El *método*

El profesor utilizó el siguiente método:

- El profesor propone oralmente una operación a realizar
- Los estudiantes escuchan, memorizan la pregunta y efectúan mentalmente la operación
- A la señal del profesor, escriben en sus cuadernos la respuesta y en seguida los levantan para que el profesor pueda ver la respuesta de todos. Algunas son correctas otras no. Esta es la situación estándar
- El profesor pregunta a varios estudiantes (tanto a los de respuestas acertadas como a los de respuestas falsas) sobre el proceso de cálculo que siguieron
- Cada uno debe estar en capacidad de describir la sucesión de cálculos. En los casos de falla, el estudiante a quien se le pregunta puede notar su error y corregirlo oralmente si explica lo que no estaba bien y por qué. Los otros estudiantes escuchan y están listos a intervenir en caso de no estar de acuerdo
- El profesor motiva a que otros estudiantes con otros métodos de cálculo intervengan (ellos levantan la mano) para expresar su opción
- Los estudiantes, de manera colectiva, en el transcurso de las interacciones verbales (entre estudiantes) reguladas por el profesor, comparan los métodos, sus ventajas o inconvenientes, la rapidez y las posibilidades de control

En el transcurso de este trabajo se manifiestan, de manera explícita en las aplicaciones pero sin una denominación teórica, muchas de las propiedades de los números y de las operaciones, de las propiedades de orden y de la compatibilidad con las operaciones. Estas propiedades intervienen con el status de herramienta para guiar los cálculos, seleccionar, justificar las respuestas o corregir las incoherencias. Aquí se desarrollan prácticas explícitas de cálculo y de control de resultados. Por ejemplo:

> *Estoy seguro de que su resultado es falso porque 12 x 11 es mayor que 12 x 10, y él encontró un número menor que 120.*

De otro lado, se desarrollan y se necesitan de manera intensa la atención y la escucha mutuas más que la memorización. Sin embargo esta situación tiene una duración que, por lo general, no sobrepasa los 10 minutos o el cuarto de hora.

La *realización*

De hecho, este bello programa tuvo obstáculos desde la primera etapa. Para un gran número de estudiantes no hacía parte de su contrato y por lo tanto no se sentían con el deber de escuchar al profesor mientras se dirigía a ellos. La única relación con el profesor que percibían en esos momentos era una relación de autoridad. El profesor tenía la opción de aceptar su lógica y establecer una relación de autoridad o intentar convencerlos con palabras que los hiciera cambiar de lógica.

Esta última opción, por muchas razones que no voy a mencionar aquí, estaba destinada al fracaso. Finalmente, las decisiones del profesor demuestran que se inclinó por la primera opción. Como se puede ver, ya no se trata de una opción sino de la única vía posible de comunicación con la mayoría de los estudiantes.

Los objetivos principales del profesor son los siguientes:

- *Escuchar y respetar* en la relación entre el profesor y los estudiantes, o en las relaciones entre estudiantes. Cuando el profesor se dirige a los estudiantes o cuando uno de ellos se dirige a los demás, aquellos que permanecen en silencio escuchan y tratan de comprender lo que dice quien habla
- *El contenido de las interacciones* es esencialmente matemático. Aquí el tema del cálculo mental remite a trabajar con los números y las operaciones

Los conocimientos del estudiante que en un principio son suficientes para el profesor son los *nombres* de los números y de las operaciones.

Primera afirmación del profesor o el ejercicio de su autoridad

> *P (el profesor): Voy a proponerles algunas operaciones y voy a pedir a algunos de ustedes que* ***repitan*** *lo que dije. No les pido calcular o encontrar un resultado, sino repetir exactamente.*

Cualquier estudiante puede responder a la demanda del profesor, salvo si niega el juego de la escuela. Se escuchan murmullos y la protesta de algunos estudiantes. El profesor insiste y señala.

> *P: 14 multiplicado por 4, Pedro; 5 multiplicado por 22, Pablo; 40 dividido entre 8, María...*

Algunas preguntas análogas se repiten los días siguientes, pero cada vez los enunciados se hacen más complejos. Las variables de situación a disposición del profesor son, para las matemáticas:

- el rango de números solicitados (entre 0 y 100 al comienzo)
- la naturaleza de los números: enteros o no enteros
- las operaciones: familiares o no familiares
- la complejidad del enunciado (una operación, varias operaciones)

Y para la gestión en clase:

- el número de estudiantes a quienes le pregunta
- la duración de la actividad cada día
- el número de secuencias

Segunda afirmación del profesor y cambio de contrato

> *P: Voy a proponerles algunas operaciones y les voy a pedir a algunos de ustedes que las* ***repitan de otra forma.*** *Por ejemplo, para 15x3 ustedes pueden proponer 5 x 3 x 3 o (10 + 5) x 3 o cualquier otra expresión que tenga el mismo resultado si hacemos el cálculo, pero no vamos a hacer el cálculo en este momento. No se puede repetir dos veces la misma expresión.*
> *• Quien responda tiene la posibilidad de pedir ayuda a otro compañero si no tiene ideas*
> *• Los demás deben escuchar atentamente para decidir si podemos o no aceptar la expresión propuesta, y por qué*

La nueva variable a disposición del profesor es el hecho de sugerir o no a los estudiantes que escriban sus proposiciones. De esta forma, después de algunas secuencias controladas por completo por el profesor, aquéllos que tienen conocimientos numéricos tienen la oportunidad de expresarlos en un contexto relativamente poco restrictivo, pero en todo caso delimitado. También tienen una opción que se enmarca dentro de un campo establecido y seguro. Del otro lado, deben responder a una pregunta del profesor, y por esto no corren el riesgo de ser tomados como "profesorcitos" y ser rechazados por sus compañeros que cuentan con menos herramientas matemáticas. En varias secuencias, durante dos o tres semanas, se seguirán utilizando este tipo de afirmaciones.

Tercera afirmación del profesor y toma de responsabilidad por parte de los estudiantes: hacia un nuevo objeto de estudio

> *P: Una vez más les voy a proponer algunas operaciones y voy a pedirles que las **repitan de otra forma**, pero esta vez cada uno tiene la opción de proponer su respuesta. La única condición es que no se haya dicho. Quiero una nueva cada vez.*

El profesor quiere orientar el trabajo de los alumnos, de un lado hacia lo escrito, y de otro hacia el estudio explícito de las propiedades de los números y de las operaciones. Para esto, cuenta con la evolución del juego **de lo oral hacia lo escrito** y con una interacción entre los dos modos. Le resta organizar esta evolución. El análisis siguiente explica sus decisiones.

La expresión oral basta mientras la información que los estudiantes deban recoger y manejar no sobrepase su capacidad de memoria. Para que la expresión escrita sea necesaria, hay que evidenciar las fallas de la expresión oral cuando se sobrecargan ampliamente las capacidades para memorizar. Existen por lo menos dos razones para esto: cubrir la diversidad de los estudiantes y hacer inoperante un esfuerzo de memoria. De esta forma y para obtener la evolución deseada, el profesor juega con la variable "numero de estudiantes a quienes se les pregunta". La hace sufrir un salto al cambiar la regla de juego: cada uno tiene derecho a proponer su respuesta.

El profesor cuenta con la familiaridad que se ha desarrollado con esta práctica del cálculo mental para obtener *muchas* proposiciones. Para que los estudiantes puedan responder a la petición del profesor, necesitan saber escribir las diferentes expresiones numéricas, tomando como base un rango "razonable" de números que incluye los signos operatorios y los paréntesis. De forma paralela y a partir del trabajo oral desencadenado con la segunda afirmación del profesor, y también con el trabajo de lectura y escritura por fuera de las matemáticas, se ha podido ubicar y desarrollar progresivamente otro objeto de otra parte del aprendizaje.

Del lado de los estudiantes, la reacción esperada se produce al finalizar dos o tres secuencias: "uno no se puede acordar de todo, hay que escribir". "Hay que ponerse de acuerdo sobre las proposiciones que son parecidas y sobre aquellas que son nuevas".

Las propiedades operatorias se toman aquí como unas *herramientas implícitas* de clasificación, expresadas en términos de acción en un contexto determinado. La *explicitación* oral que se le pidió a cada estudiante en condiciones de "escucha activa" por parte de los otros tiene por objetivo favorecer la despersonalización de los procedimientos y avanzar en la conceptualización de las propiedades subyacentes.

Cuarta afirmación y cambio de la problemática

> *P: Encontrar las reglas para separar las proposiciones semejantes de las diferentes.*

Desde el punto de vista matemático, los objetos de estudio siempre se ubican en el campo numérico. Sin embargo, los números y las relaciones entre ellos y las operaciones ya no son tan directamente el objeto de estudio, sino más bien las propiedades de la operaciones.

La *evaluación*

La *devolución* del cálculo mental tal y como el profesor la concibió y las interacciones entre lo oral y lo escrito demoraron dos meses en llevarse a cabo. Esto tomó de 10 a 30 minutos según el día, cinco días por semana. Esta práctica se desarrolló y enriqueció en sus modalidades con la evolución de los conocimientos de los estudiantes a lo largo del año. Algunos problemas que se consideraron casi imposibles para abordar pudieron estudiarse: problemas de geometría y de medidas junto con la introducción de los números racionales, por ejemplo.

En lo concerniente a los objetivos del profesor, se puede decir que múltiples factores se conjugaron para hacer evolucionar las relaciones sociales en el interior de la clase de un lado, y las relaciones de conocimiento, por el otro. Entre estos factores, la actividad del cálculo mental, tal y como se vivió, jugó un papel clave. Otro factor que tuvo un papel importante fue el hecho de que se hicieran cargo de la clase dos profesores quienes, gracias a una estrecha coordinación, abordaron el problema de la simbolización. El profesor se encargó de las disciplinas científicas, y una profesora, con una formación psicológica y con experiencia con alumnos que tienen dificultades de lectura, se hizo cargo de los otros campos disciplinarios (para respetar las reglas institucionales, los dos profesores tomaron las dos clases que les correspondía, con la misma repartición de tareas).

EL CALCULO MENTAL Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Con respecto a las perspectivas que ofrece el cálculo mental, se formula una cuestión más amplia: aquella del vuelco hacia el estudio de un problema, y de las competencias numéricas objeto del cálculo mental. Hemos observado en el marco de nuestras investigaciones que la práctica regular del cálculo mental, tal y como se describió, generaba en la gran mayoría de los estudiantes una gran rapidez de cálculo. Más aún, la facilidad de algunos estudiantes para calcular mentalmente intervenía en múltiples ocasiones en tres momentos a lo largo del estudio cuando se les enfrentaba a un problema.

Al inicio del estudio, los estudiantes mostraban facilidad para el cálculo mental cuando se necesitaba recoger información suficiente para hacerse una idea de la situación a tratar. Por ejemplo, para responder a esta pregunta "a partir de este rectángulo, encontrar otro de perímetro más grande y de área menor", se observó un primer método. Consistía en escoger varios rectángulos de perímetro mayor y calcular su área, o varios rectángulos de área menor y calcular su perímetro, antes de poder considerar las variaciones conjuntas. La posibilidad de hacer cálculos mental y rápidamente era un triunfo en este estudio. En el transcurso del estudio, la misma facilidad se utilizaba para evitar enunciar operaciones simples e ir más rápido; por ejemplo las multiplicaciones o divisiones por 2, o incluso para optimizar las selecciones numéricas en las situaciones de delimitación. Al final del estudio, tal facilidad se empleaba para controlar los resultados de un algoritmo. Por ejemplo, resolver una ecuación al aplicar un algoritmo y después verificar la validez del resultado al sustituirlo en la ecuación.

De aquí surge un interrogante. ¿Se puede sustituir la calculadora con el cálculo mental? Si no es así, ¿qué tiene de específico cada una de las formas de cálculo (el mental, escrito, con calculadora) y cómo se pueden conjugar en un trabajo donde lo numérico es importante?

El cálculo algebraico en la articulación entre la educación básica secundaria y la educación media

El juego didáctico del problema que se presenta pretende trabajar con las factorizaciones y desarrollos de expresiones algebraicas.

El estado de los escenarios

Si se miran los programas de enseñanza de las matemáticas en el colegio, el cálculo literal, es decir, el cálculo que se realiza sobre expresiones que tienen letras y números, se introduce en 9º. El aprendizaje de la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita se realiza en 8º. La introducción de las *expresiones frecuentes,* la práctica de los *desarrollos* y *factorizaciones* se desarrolla progresivamente en 6º, 7º y 8º.

Desde el punto de vista matemático, se trata de calcular polinomios con una variable numérica, escritos en forma de combinaciones lineales de monomios con coeficientes reales o de productos de factores. Por supuesto, estos términos matemáticos no hacen parte del discurso de la clase, ni por parte del profesor ni por parte del estudiante.

En la práctica tradicional dentro del salón de clase, por lo general este tipo de temas se trabaja al nivel de la simbología, sin problemas que los hagan interesantes o les den sentido. Es un asunto de cálculo literal y no de cálculo algebraico presentado y tratado, bien como prolongación del cálculo numérico ("es parecido pero con letras"), o como una serie de reglas a aplicar ("basta con aprenderse las reglas"). Esta descripción es un poco caricaturezca; sin embargo, la situación real se asemeja a la descrita en ambientes alejados de la reflexión didáctica, que por fortuna se expanden cada vez más.

Del lado de los estudiantes, son numerosos los errores persistentes y recurrentes, que escapan a los esfuerzos de los profesores por evitarlos o corregirlos. Tanto los profesores mismos, como los investigadores que se han dedicado a este tema, han elaborado un amplio inventario de dichos errores.

Con respecto al significado

Como muchos otros investigadores, profesores y formadores, también estoy de acuerdo con la gran importancia que tiene la construcción de significado de las nociones matemáticas en los estudiantes, para que ellas puedan estar disponibles cuando necesiten enfrentarse a una situación novedosa. Como se mencionó antes, el significado tiene al menos dos componentes: la componente *semántica* y la *sintáctica*. Para tener en cuenta su componente semántica, se ha enfatizado el status de herramienta de las nociones y las relaciones con nociones diferentes internas o externas a las matemáticas. Para resaltar su componente sintáctica, se acentuaron los sistemas de representación simbólicos, la manera como funcionan y como son tratados por los estudiantes. El trabajo de modelaje algebraico ofrece una oportunidad en particular favorable para que el profesor y los estudiantes se enfrenten a estas dos componentes y a la importancia de su interacción en la evolución de la relación didáctica.

Sin embargo, en lo concerniente al álgebra, al menos, el significado no basta. La manera como un tratamiento algebraico se lleve a cabo proviene justamente del *olvido* de la contextualización que se encuentra en su origen. Por esto, se hace necesario tener en cuenta la influencia del significado en la elaboración de algoritmos y, simultáneamente, trabajar en apartarse de ellos. Yo concibo el aprendizaje del cálculo algebraico como *el equilibrio o la interacción entre la construcción del significado y la familiaridad técnica con los algoritmos*.

Y surge entonces una pregunta: ¿Si se toman las anotaciones anteriores como hipótesis, cómo se podrían ellas traducir en una ingeniería didáctica?

Hay que precisar las evidencias. No basta con uno o varios problemas para que los estudiantes manejen a plenitud de responsabilidad una competencia algebraica. Esta es una cuestión de larga duración que requiere una vigilancia intelectual permanente. Por ejemplo, las interconexiones entre diferentes cuadros o los cambios en el punto de vista o de registro al interior de un cuadro realizados para avanzar en un problema son medios a través de los cuales se manifiesta la sutileza del pensamiento. Ellos ofrecen la oportunidad de confrontar ideas, indagar las coherencias y controlar los resultados. Sin embargo, poner en la práctica tales procedimientos no se logra espontáneamente; para ello se necesita una verdadera educación. Más adelante volveré a mencionar las condiciones para ello.

ELABORACIÓN DE UN PROBLEMA DE ÁLGEBRA

Me ubico en un contexto donde el profesor y los estudiantes están reunidos en la clase de matemáticas para hacer esencialmente matemáticas. En el ejemplo siguiente se trata del álgebra. Primero describo el contexto escolar involucrado y a continuación los objetos de estudio en cuestión. Después propondré un problema construido para poner en práctica durante su resolución los objetos de estudio escogidos. Por último haré un análisis matemático y didáctico del enunciado, donde expondré las variables sobre las cuales el profesor puede influir, las escogencias hechas y las razones de tales selecciones, y también los resultados que se esperan de los estudiantes.

El contexto escolar

Me interesan los estudiantes que finalizan la educación básica secundaria e ingresan a la educación media. Todos esos estudiantes ya han tenido la oportunidad de manipular expresiones algebraicas generales de grado pequeño. Ya han realizado desarrollos de escritura según las reglas del cálculo literal: desarrollos (de la forma "producto" a la forma "suma"), y algunos casos limitados de factorización. También se han resuelto algunas ecuaciones de primer grado y una incógnita. Las ecuaciones se han formulado bien sea directamente en el cuadro algebraico, o como resultado de colocar en forma de ecuación pequeños problemas de geometría, medición, vida cotidiana u otros. Los estudiantes han utilizado en diversas ocasiones las calculadoras. También tienen cierta experiencia en marcar puntos sobre un plano con dos ejes ortogonales graduados.

Los objetos algebraicos que nos interesan aquí son esencialmente los polinomios de una variable y de grado pequeño: de grado 1 en la resolución de ecuaciones, y de grado 2 o 3, con menor frecuencia, en las factorizaciones o desarrollos de expresiones algebraicas.

Se descubrieron muchos errores de los estudiantes en la práctica escolar del cálculo algebraico (resolución de ecuaciones, desarrollo de productos en sumas y factorización de sumas en productos). Salieron a relucir errores recurrentes y persistentes que revelaban obstáculos más profundos. Por ejemplo:

- Según las "necesidades" de cálculo, pasar números que estaban en posición de coeficiente a la posición de potencia o viceversa. El efecto logrado era poder reagrupar en un solo término, términos con grado diferente
- Colocar mal los paréntesis
- Cambiar de signo sistemáticamente al pasar una expresión (eventualmente reducida a un número o a una letra) de un miembro al otro de la ecuación, aún si se trataba de efectuar una multiplicación o una división

También hay que mencionar las fallas en el desempeño de los estudiantes si en vez de pedirles resolver una ecuación, se les preguntaba si un número determinado era la solución a la ecuación.

A partir de estos hechos, me pregunto sobre la pertinencia y disponibilidad de conocimientos (algunas veces adquiridos de manera costosa en términos de esfuerzo y tiempo tanto para el profesor como para los estudiantes), en contextos donde serían herramientas adaptadas.

Los objetos de estudio

En el cuadro algebraico, el estudio versa sobre la factorización y desarrollo de funciones polinómicas. Se van a estudiar las relaciones entre las formas de escritura y los asuntos que se manipulan, como la búsqueda de los valores de anulación de un polinomio o la resolución de ecuaciones.

En el cuadro gráfico, el estudio aborda la representación gráfica de funciones polinómicas y trata de evidenciar algunas de sus propiedades.

Objetivos para la selección del problema

- *Coordinar* temas que se abordan y se tratan de forma separada, pero que desde el punto de vista matemático sostienen relaciones de significado

El punto de partida es el siguiente: *la escritura* es un medio privilegiado *para comunicarse* en matemáticas; pero también es un medio *para progresar.* Aquí, la escritura factorizada y la escritura desarrollada facilitan el acceso a las diferentes propiedades de los polinomios. El problema debe resaltar este punto. Se espera que los estudiantes tengan los medios para darle significado a la forma escrita de las expresiones algebraicas y para avanzar en la comprensión y conocimiento de las propiedades que tales formas tienen.

Para responder a esta exigencia, se decidió que en el problema intervinieran los objetos de estudio como *herramientas adaptadas* para resolverlo. Esto conduce a la ampliación del campo matemático al cual se lleva el problema. En particular, se hace interactuar y no yuxtaponer los estudios que se ubican en los cuadros algebraico y gráfico e, implícitamente, se introduce un punto de vista de “función”.

- *Dar a los estudiantes medios* para *ejercer un control de tipo científico* sobre lo que hacen o dicen
- *Crear* nuevos objetos. La resolución debe desembocar en un nuevo conocimiento que tenga significado para los estudiantes y que el profesor pueda institucionalizar en la clase

Los objetivos que acabo de enunciar se centran en un punto del álgebra: las factorizaciones y los desarrollos. De hecho, su puesta en práctica conlleva una ampliación de la situación didáctica de tal manera que muchos otros elementos matemáticos (nociones, métodos) de cuadros diferentes se trabajen desde el punto de vista del significado y de la técnica. Las interacciones entre los cuadros y los cambios entre cuadros juegan un papel clave en este trabajo.

Las selecciones matemáticas y sus justificaciones

En términos algebraicos, para anular una expresión polinomial de grado superior o igual a 2, por lo general es más interesante que dicha expresión esté formulada como un producto de factores de primer grado, ya que al anular cualquiera de los factores se anula el producto. Por esto, el problema enunciará una pregunta exterior al cuadro algebraico. Para responderla será necesario anular una expresión polinomial. Para calcular el valor numérico de una expresión como esa, la forma desarrollada puede resultar más cómoda. Para resolver una ecuación de segundo grado que tiene una parte escrita en forma desarrollada y otra en forma factorizada, hay que transformar una de las formas para homogeneizar la escritura: todo debe estar desarrollado o factorizado. Si la técnica de resolución con ayuda del discriminante no está disponible, entonces la factorización es la única esperanza para resolver la ecuación.

Resolver una ecuación $A(x) = 0$, por ejemplo $ax + b = 0$ ó $(ax + b)(cx + d) = 0$ ó $ax^2 + bx + c = 0$, significa encontrar los valores de la incógnita x para los cuales la expresión $A(x)$ es igual a 0; también significa encontrar los valores de la variable x para los cuales la función $x \rightarrow A(x)$ se anula. Haremos mención, según el caso de manera explícita o implícita, a estos dos puntos de vista en el problema.

En términos gráficos, anular un polinomio o resolver una ecuación se traduce en la búsqueda de los puntos donde la representación gráfica de la función en cuestión se corte con el eje de las abscisas. Se pueden formular las preguntas en el cuadro gráfico, pero para responderlas hay que trabajar en el cuadro algebraico bien sea para hacer cálculos numéricos después de haber escogido un valor numérico para x, o bien para resolver las ecuaciones, trabajo para el cual la selección de la escritura puede ser determinante.

Selección de la presentación del problema
Se decidió proponer un enunciado que casi todos los alumnos pudieran abordar con sus conocimientos del momento, y que no impusiera ningún procedimiento.

El problema
En un plano formado por dos ejes graduados, ortogonales,

A. Interesan los puntos del plano cuyas coordenadas (x, y) están definidas por la relación: $y = (x+3)\left(8 - \frac{x}{2}\right)$. Se denomina E al conjunto formado por estos puntos.
   - Proponer 5 pares de coordenadas correspondientes a puntos de E, y 5 pares de coordenadas correspondientes a puntos que no pertenezcan a E.
   - Representar gráficamente la mayor cantidad posible de puntos de E.
   - Hay puntos de E sobre el eje de las abscisas? ¿Y sobre el eje de las ordenadas? Si es así, dar las coordenadas de esos puntos. Si no, decir por qué.
   - ¿Hay puntos de E que tengan la misma abscisa? ¿Y otros que tengan la misma ordenada? Si sí, dar ejemplos; si no, decir por qué.

B. Interesa ahora el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas (x, y) estén definidas por la relación: $y = x^2 - 9$. Se denomina F al conjunto formado por estos puntos (Responder a las mismas preguntas que se formularon al punto A).

C. ¿Hay puntos comunes entre E y F? Si sí, dar las posibles coordenadas de estos puntos.

Como se puede percibir con la lectura del enunciado, el problema involucra diferentes cuadros. Para abordarlo, los estudiantes tienen que hacerlos interactuar, *ponerlos en juego*. Esto requiere que ellos tengan *suficientes* competencias en cada uno de esos cuadros. Por esto, las competencias se enuncian y clasifican a continuación, teniendo en cuenta cada cuadro de referencia. Para el profesor que ha escogido o construido un problema también surge de manera regular una pregunta que versa sobre el hecho de si el problema pone en juego de manera adecuada las nociones que él quiere tratar en las condiciones donde él colocó el problema (aprendizaje, familiarización, prueba de conocimiento). Más aún, el profesor necesita saber con qué variables puede jugar y cuál es la incidencia de sus selecciones en los comportamientos de los estudiantes. En ellas se encuentran los elementos importantes de su margen de maniobra. Sus preocupaciones explican las descripciones siguientes.

Las competencias

Las competencias que entran en juego en el problema son de dos tipos: las competencias que se supone tienen los estudiantes para abordar el problema en cada uno de los cuadros que intervienen en él, y las competencias que efectivamente deben tener los estudiantes para poder resolver el problema. Con respecto a las primeras, *las competencias que supuestamente deben poseer los estudiantes* para abordar el problema son, en el cuadro gráfico:

- Trazar ejes ortogonales y saber graduarlos
- Ubicar los puntos cuyas coordenadas se conocen
- Leer las coordenadas de puntos marcados
- Utilizar correctamente las palabras marca, ejes ortogonales, graduación, coordenadas, abscisa, ordenada

En el cuadro algebraico:

- Sustituir los valores numéricos por letras en la expresión algebraica y calcular su valor

Y en el cuadro numérico:

- Calcular correctamente con enteros naturales
- Calcular de forma más o menos adecuada con los enteros, los decimales y las fracciones
- Utilizar una calculadora como ayuda para los cálculos

Por el otro lado, *las competencias algebraicas que sin duda deben estar disponibles* y que, según el caso, ayudarán u obstaculizarán, son:

- Desarrollar expresiones algebraicas polinomiales de primer o segundo grado donde intervienen los productos de factores
- Factorizar en casos muy particulares
- Resolver una ecuación de primer grado con una incógnita

Los cuadros del problema

Las preguntas se formularon en el cuadro *gráfico*, pero en los datos, los puntos se seleccionan por medio de una relación *algebraica*. El cuadro *numérico* sirve de ambiente.

Las herramientas

Las herramientas conceptuales que entran en juego son:

- Las nociones subyacentes a las competencias que se presuponen como herramientas explícitas, en especial el expresar como productos de factores
- El teorema "para que un producto de factores sea nulo, es necesario y basta con que uno de sus factores sea nulo", como herramienta implícita

Y las herramientas tecnológicas se refieren a:

- Una vez se ha decidido el método de trabajo (sustituir los valores numéricos por letras en las expresiones algebraicas y calcular su valor), la calculadora, en lo posible programable, permite programar y obtener las coordenadas de una gran cantidad de puntos de E y después de F, y tener una visión geométrica de estos conjuntos

LAS VARIABLES DEL PROBLEMA

Las variables que intervienen en el problema pueden presentarse teniendo en cuenta cada uno de los cuadros. Las variables asociadas con las relaciones *algebraicas* son:

- El grado: 2 o 3
- La expresión escrita: factorizada o desarrollada
- El orden de los monomios: en una lectura de izquierda a derecha, primero el término en x o primero la constante
- Los coeficientes numéricos: enteros, no enteros, positivos, negativos, etc.
- Los valores de anulación

Las asociadas con el cuadro *gráfico* son:

- El número de puntos a marcar: finito o infinito
- La posición de los puntos a seleccionar: no importa dónde, sobre uno de los ejes dentro de los límites materiales de la gráfica o fuera de esos límites, por fuera de los ejes pero con una condición restrictiva

Y las asociadas con el cuadro *numérico* son:

- Recopilación y tratamiento de una información numérica pertinente
- Uso o no de una calculadora. Si se usa, de una calculadora sencilla o programable. Esto determina qué tan diferente pueda ser el tratamiento de un problema

Las selecciones didácticas que fijan las variables y las intervenciones del profesor

Tales selecciones, en la parte A del problema, son:

Lo primero que el profesor espera es que los estudiantes den significado a la expresión “ (x, y) están definidas por la relación...”. Para probar esto, se pide ubicar 5 puntos cuyas coordenadas verifiquen la relación y 5 puntos que no. En caso de dificultad, el profesor puede iniciar una discusión en la clase sobre el significado que se le da a la expresión.

Lo segundo se relaciona con el menor o mayor conocimiento de los puntos de E. La calculadora programable permite, una vez se ha decidido el método de trabajo (sustituir los valores numéricos por letras en las expresiones algebraicas y calcular su valor), programar y obtener las coordenadas de una gran cantidad de puntos de E y de F. Como resultado se puede tener una visión geométrica de estos conjuntos. Esto permitirá más adelante concebir los puntos comunes a E y F como puntos de intersección de dos curvas.

La escogencia de dos parábolas cuya concavidad es de sentido opuesto y los vértices no están muy alejados uno del otro obedece a la voluntad de facilitar a los estudiantes la convicción de la existencia geométrica de los puntos de intersección. Resta hacer un trabajo técnico con ayuda de las herramientas algebraicas y saber calcular las coordenadas de esos puntos para probar efectivamente su existencia.

Acabo de describir aquello que denomino un *juego de cuadros* entre los cuadros algebraico y gráfico, y exploté en cada uno aquello que es fácil y que, por traducción al otro, permite avanzar en el problema.

Lo tercero que se espera es que los estudiantes relacionen los siguientes elementos:

1. *Tal punto está sobre el eje de las* x con *su ordenada* $y = 0$.

2. *Buscar los valores de* x *que anulan* y con *resolver la ecuación* $y = 0$ y que deduzcan de esas relaciones un medio para encontrar los puntos de E sobre el eje de las abscisas. La relación algebraica escogida está escrita en la forma de un producto de dos factores de primer grado para facilitar la búsqueda de los valores de x que anulan y. Sin embargo, debido a la familiaridad de los estudiantes con las expresiones desarrolladas, se puede pensar que un cierto número de ellos tenderá a desarrollar el producto de factores. Por lo tanto, estos estudiantes no saben resolver los trinomios de segundo grado. La expresión desarrollada los conduce a un impasse de donde algunos logran salir gracias a algunas "amalgamas audaces".

Los coeficientes se escogen de tal forma que una de las raíces sea igual a un entero pequeño y pueda encontrarse después de algunos ensayos de valores enteros de x; y que el otro tome un valor lo suficientemente grande como para escaparse a los ensayos y corresponda a un punto por fuera de la hoja donde está dibujado el gráfico. En este momento toca necesariamente resolver una ecuación de primer grado.

Lo cuarto que se espera es que los estudiantes transformen el método "escojo un valor para x, no importa cúal, el que yo quiera, hago el cálculo siguiendo la fórmula, y encuentro el valor de y" en una propiedad de la relación "a cada valor de x corresponde uno y un solo valor de y", y después en una característica del conjunto E "a todo valor de x corresponde uno y un solo punto de E".

Las selecciones para la parte B del problema son:

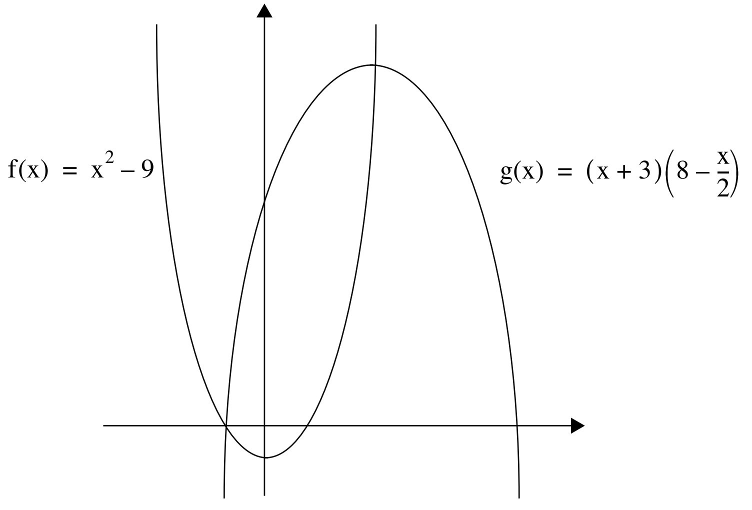
Se pide algo análogo a lo anterior, pero a partir de una relación algebraica que es una expresión frecuente como la "diferencia de dos cuadrados". El profesor espera una solución rápida a esta parte. Su interés es doble:

1. Evaluar a los estudiantes sobre aquello que aprendieron en la parte A), y en todo caso darles la oportunidad de hacerse las mismas preguntas y, en caso de haber fallado, comprenderlas mejor.

2. Preparar la parte C), donde en verdad se manifiesta el problema.

Y para la parte C son:

Se pide a los estudiantes encontrar los puntos comunes a los dos conjuntos descritos respectivamente en A) y B). Desde el punto de vista gráfico, un punto común a E y F tiene coordenadas (x, y) tal que y se expresa de manera diferente en función de x si se le considera como punto de E o de F (denominémoslos y_E y y_F). El trabajo precedente debe en principio conducir a los estudiantes a la traducción algebraica de la pregunta. Por lo tanto, algebráicamente, será indispensable que el signo "=" tome otro significado diferente al que ha tenido en el estudio de las partes precedentes. De hecho, la ordenada y era el resultado de un cálculo y el signo "=" quería decir "tiene por resultado". La referencia gráfica (un punto tiene un par único de coordenadas) sugiere que se escriba $y_E = y_F$ para expresar que la ordenada de un punto común entre E y F puede escribirse de dos maneras, lo cual no tiene nada que ver con el resultado de un cálculo. Es más, esta igualdad tan sólo puede expresarse para los puntos comunes entre E y F. En otras palabras, hay tantos puntos comunes como valores que satisfacen esta igualdad. En términos algebraicos, esto se traduce en la resolución de una ecuación de segundo grado que tiene términos de x a ambos lados. Por lo tanto, se trata de una dificultad que tanto profesores como investigadores han notado en el tema, aún si la ecuación es de primer grado. Para facilitar la tarea, escogimos uno de los puntos sobre el eje de las x de tal forma que hiciera parte de los puntos ya señalados gráficamente en los dos conjuntos. Ese punto corresponde a $x + 3 = 0$. Una vez vistas las selecciones descritas anteriormente de las posiciones relativas de las parábolas, el otro punto se puede ver gráficamente



Para que la resolución algebraica sea necesaria, hay que escoger las coordenadas de este punto, es decir los coeficientes de las ecuaciones, de manera que ellas no puedan encontrarse con algunos ensayos empíricos. Así, para resolver la ecuación $x^2 - 9 = (x+3)\left(8 - \frac{x}{2}\right)$ el desarrollo y el reagrupamiento de los términos del mismo grado llevan al impasse, si las reglas del cálculo algebraico se respetan. La expresión del primer miembro bajo la forma de un producto $(x-3)(x+3)$ no se puede manejar. La factorización es una herramienta. La resolución de $x - 3 = 8 - \frac{x}{2}$ es otra herramienta. El valor de $x = \frac{22}{3}$ no se puede encontrar por azar.

Una mirada desde el lado de los estudiantes

En el transcurso de este trabajo, los estudiantes pueden cometer muchos errores. Ellos pueden producir cálculos que matemáticamente no son válidos, como reagrupar los términos de grado diferente si eso les puede conducir a una respuesta. En ese momento la referencia gráfica se torna interesante si se acostumbra en la clase buscar la coherencia entre los resultados a una pregunta obtenidos por dos procedimientos diferentes.

En efecto, buscar esas coherencias puede tomar mucho tiempo. Si un estudiante se mete en ese trabajo y no encuentra un resultado convincente y si el profesor no reconoce oficialmente el trabajo que el estudiante realizó, este estudiante tendrá pocos ánimos para comenzar de nuevo. Por lo tanto, el hecho de que los estudiantes se hagan cargo, al menos de manera parcial, del control de sus producciones puede convertirse en un motor para el avance del aprendizaje. Un trabajo de este estilo requiere unas competencias matemáticas, al igual que el reconocimiento en el contrato didáctico.

Volvamos al problema. Como ya lo explicamos, el conocimiento gráfico de la situación puede servir de *guía* y también de *control* de la situación algebraica. Uno de los puntos comunes ya se conoce, falta descubrirlo por medio de la resolución algebraica. Al otro se puede tener acceso si se resuelve una ecuación de primer grado con coeficientes pequeños $x - 3 = 8 - \frac{x}{2}$ para calcular x. Falta entonces calcular el valor correspondiente de y. Las coordenadas deben coincidir con valores aceptables gráficamente.

Una mirada del lado del profesor

Al hacer variar los coeficientes de los polinomios, el profesor puede cambiar sus objetivos. Si el objetivo es ante todo de orden conceptual, él puede facilitar la tarea técnica de los estudiantes para conservar la fuerza y el significado de los conceptos en juego. Esto se traducirá bien sea en la selección de los datos para reforzar el significado, o en la introducción de tecnologías (calculadoras o computadores) que ayuden a los estudiantes a manejar las dificultades técnicas, o también en el uso de las dos estrategias anteriores. Si el objetivo es más bien familiarizar o evaluar la capacidad para reutilizar las herramientas en situaciones más complejas donde lo que se acaba de aprender es tan sólo un elemento de la situación, entonces lo que se pone en juego puede ser técnico.

Institucionalización local teniendo en cuenta el contexto

Después de todo el trabajo en clase sobre el problema, al profesor le toca seleccionar aquello que para los estudiantes ha tomado sentido, aquello que es matemáticamente interesante y que se puede volver a utilizar, y aquello que hace parte bien sea en forma directa de sus objetos de enseñanza, o en forma preliminar, o en forma de práctica de campo sobre los objetos del programa. Al hacer esto, el profesor organiza explícitamente el saber de la clase. Si este saber está ligado a la clase, me referiré a la *institucionalización local*. Si se encuentra relativamente descontextualizado y despersonalizado y como tal es susceptible de ser comunicado y comprendido en el exterior sin necesidad de conocer la historia de su producción, los conocimientos en juego tienen más bien un status de objeto y entonces me refiero a la *institucionalización*. Para resumir, el profesor hace un poco de la clase.

En el caso que se está estudiando, se va a hacer esencialmente institucionalización local de varios aspectos.

Del vocabulario. $y = (x+3)\left(8-\frac{x}{2}\right)$ se llama la ecuación de E, $y = x^2-9$ es la ecuación de F. Se podrá decir que estas son ecuaciones de grado 2 y explicar de dónde viene el 2.

De las relaciones entre la gráfica y el álgebra. Por un lado, los puntos de E sobre el eje de las abscisas son los puntos de coordenadas $(x, 0)$. Por lo tanto x es la solución de $(x+3)\left(8-\frac{x}{2}\right) = 0$. Por otro lado, los puntos de F sobre el eje de las abscisas son los puntos de coordenadas $(x, 0)$ donde x es la solución de $x^2-9 = 0$.

Un nuevo conocimiento en álgebra. Hay casos donde se sabe resolver ecuaciones de segundo grado: cuando no hay términos en x como en la ecuación de F, o cuando se puede escribirlo en la forma de un producto de factores, por ejemplo al señalar un factor común o una expresión frecuente. Entonces, si uno de los factores es nulo, el producto es nulo. De manera recíproca, si un producto $A \cdot B = 0$ es porque $A = 0$ ó $B = 0$. Pero también la institucionalización se hace sobre un método: para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $A \cdot B = 0$, se resuelven dos ecuaciones de primer grado: $A = 0$ y $B = 0$. Cada una de estas ecuaciones tiene una solución que al mismo tiempo es solución de la ecuación de segundo grado que se propuso.

Se puede notar que, del lado del profesor, la institucionalización es un proceso que hace su aparición con la selección del problema, con las decisiones que organizan la situación didáctica y que el curso no es sino una etapa del proceso. Pero del lado de los estudiantes, el proceso de pronto no se ha vivido como tal, es decir, como un conjunto de etapas articuladas de manera coherente en relación con un objetivo de aprendizaje. En particular, el profesor puede encontrar dificultades con algunos grupos de estudiantes que tienen que realizar la situación que él ha concebido con unos fines didácticos. Realizar quiere decir hacer la devolución del problema: los estudiantes van a encontrarse en interacción científica con el problema durante un momento donde no hay mediación del profesor para decir lo que se puede hacer. Esto quiere decir que estos estudiantes son conscientes de que la situación (a-didáctica) que el profesor concibió y que acaban de vivir constituye el significado de algo que se institucionalizará después. M.J. Perrin (1992), en su investigación sobre los estudiantes de estratos populares, evidenció el hecho de que la mayoría de ellos no establecía ninguna relación entre el trabajo que se hacía para resolver un problema que el profesor había propuesto, y el desarrollo siguiente que elaboraba el profesor, con base en las acciones que los estudiantes habían efectuado. Las condiciones de esta articulación no son sin duda siempre fáciles de establecer. Las palancas apropiadas no están necesariamente disponibles para el profesor. Por esto mismo, ésta es una cuestión que debe tenerse en cuenta desde el inicio mismo de la reflexión sobre la organización de la situación didáctica.

LAS CONDICIONES PARA QUE UN PROBLEMA SEA LA FUENTE Y LA OPORTUNIDAD DE APRENDIZAJE

La situación de aprendizaje que acabamos de presentar se centró en la investigación de un problema que responde a ciertas condiciones. Nombremos las más importantes.

Con la ayuda de sus conocimientos anteriores, el estudiante no puede comprender el enunciado. Esto quiere decir que no puede dar un significado determinado a las palabras y a las oraciones empleadas. El puede tener algunas ideas para abordar el problema y con eso puede arrancar.

Con sus conocimientos, no puede solucionar completamente el problema. No se trata de una simple aplicación de las nociones o métodos conocidos. Las razones pueden ser diversas. Es posible que las nociones matemáticas no hagan explícitamente parte del conocimiento del estudiante. Esto es lo que sucede en la pregunta 2) de las parte A) y B), donde función es la noción apropiada. Puede suceder que el estudiante disponga de estas nociones, pero en otro contexto y pueda tener dificultades para adaptarlas al nuevo. Esto sucede en la parte C) donde la factorización de los dos miembros de la ecuación es la herramienta adaptada para resolverla.

Los objetos de enseñanza, aquello que el profesor quiere que los estudiantes aprendan y retengan, son herramientas adaptadas a la resolución de un problema. En el problema propuesto, la factorización es la herramienta de resolución de ecuaciones de segundo grado.

El problema se expresa en al menos dos cuadros. Aquí, los cuadros gráfico y algebraico interactúan para hacer avanzar el estudio porque sugiere procedimientos y controla los efectos.

Familiarización y reutilización

Aún si la situación de aprendizaje se desarrolla según las expectativas del profesor, surge la pregunta de saber lo que los estudiantes habrán aprendido efectivamente y lo que serán capaces de reutilizar en problemas con un contexto similar pero más complejo, o en problemas con un contexto completamente diferente, de complejidad similar o mucho mayor.

De hecho, antes de poder reutilizar lo aprendido, los estudiantes necesitan familiarizarse con su nuevo conocimiento. Un medio para lograr esto es proponerles primero abordar ejemplos de problemas cercanos al que ya han estudiado. Por ejemplo, se plantea una serie de problemas como:

- Resolver la ecuación $x^2 - 4 + (x+2)(2x-5) = 0$. Aquí la factorización sigue siendo una herramienta adaptada; sin embargo, el texto no dice nada sobre esto. Empero, $x^2 - 4$ es una diferencia visible de dos cuadrados
- Resolver otras ecuaciones del mismo orden
- Desarrollar sistemáticamente los productos en sumas y algunas sumas bien escogidas en productos

Reutilización en problemas más complejos

Para lograr esto se puede proponer preguntas donde la factorización es menos evidente y donde la representación gráfica sea muy útil:

- ¿Hay puntos comunes entre los conjuntos cuyas ecuaciones son $y = x^2 - x - 6$ y $y = (x+2)(8x-7)$?
- La misma pregunta para los conjuntos cuyas ecuaciones son $y = 5x^2 + x - 18$ y $y = (x+2)(8x-7)$

En estos casos el contexto no ha cambiado. Con estas dos últimas preguntas se aborda un problema nuevo. ¿Cómo factorizar una expresión que no tienen un "factor común" aparente o casi aparente, como $x + 2$ en la primera ecuación? La herramienta adaptada que los estudiantes desconocen es el teorema "si la expresión se anula con $x = a$, entonces es posible factorizar por $x - a$".

Justamente, la proposición recíproca fue la tratada en los ejercicios de resolución de ecuaciones de segundo grado que se trataron con anterioridad. Para avanzar, es necesario hacer explícita la relación entre los factores de primer grado de la factorización y las soluciones que se encontraron a la ecuación. En seguida se puede intentar deducir de allí un método válido para algunos casos:

- Para factorizar una expresión de segundo grado, se busca de todas las formas y por todos los medios (cálculo o gráfico) los valores de x que la anulan
- Si se encuentran dos, mucho mejor porque se pueden escribir los dos factores dependiendo de lo que se necesite para ajustar el coeficiente de x^2
- Si se encuentra uno, se puede escribir el factor correspondiente a tal valor y arreglárselas para encontrar otra de manera en que al desarrollarla de nuevo, se encuentre otra expresión de partida con una constante cercana
- Si no se encuentra nada, no se puede hacer nada

Nótese que la ingeniería descrita con anterioridad puede llevarse a la práctica durante un período largo de algunos meses. En el transcurso de este período, se estudia la pregunta, se deja un tiempo de descanso y se retoma en diferentes problemas. A lo que se apunta es al estudio ulterior de los polinomios, un objeto importante en las matemáticas. Para un estudio similar, el trabajo propuesto permite que se presenten saltos que tienen significado para los estudiantes.

Acabo de describir un ejemplo de desarrollo de la *dialéctica herramienta-objeto* con los *juegos de cuadros* (Douady, 1984, 1985, 1987) entre lo gráfico y lo algebraico. Tal dialéctica se inicia a partir de un problema que satisface ciertas condiciones que ya se han enunciado. Las *ventanas conceptuales* (Douady, 1991) que los estudiantes movilizan difieren de un estudiante a otro. De esta manera designo al conjunto de partes de cuadros que un estudiante hace interactuar o combina para estudiar el problema al cual se somete. Esas ventanas comprenden aquí las representaciones gráficas constituidas por conjuntos de puntos, los elementos del cuadro algebraico (algunas expresiones frecuentes, las ecuaciones, expresiones algebraicas diversas, algunas reglas operatorias), los números y los medios de cálculo, algunas funciones lineales o afines. Para un estudiante determinado, la ventana evoluciona en el transcurso del trabajo con relación a las preguntas y los métodos que su conocimiento le sugieren. Las ventanas constituyen el sustento de los juegos de cuadros. También se puede tratar de un conjunto de elementos de un cuadro que encuentra de antemano su pertinencia en el problema propuesto y las estrategias desarrolladas para estudiarlo (para un estudiante o para un grupo de ellos en un momento determinado). Durante el estudio, diferentes registros o diferentes puntos de vista pueden interactuar en este cuadro. Aquí, por ejemplo, intervinieron el registro de las ecuaciones y su resolución, el registro de las variaciones numéricas de una expresión algebraica y de sus valores de anulación y el registro de la factorización. Todo esto sucede dentro del cuadro algebraico.

Conclusión

La ingeniería que se acaba de presentar es un ejemplo de la puesta en escena de la dialéctica herramienta-objeto. Ella también encarna elementos importantes de la teoría de las situaciones de G. Brousseau, como el contrato didáctico. Está organizada alrededor de problemas que dan significado a las nociones matemáticas implicadas. Ella concede un lugar importante a los procesos de contextualización, cambio de contexto, reformulación de los problemas, descontextualización y también a la personalización, difusión de procedimientos o conocimientos personales, y despersonalización. En otras palabras, el profesor tiene que organizar la transformación de las herramientas a objetos y viceversa. Su objetivo es permitir a los estudiantes apropiarse del conocimiento que, gracias a la situación, está disponible y puede tomar significado para ellos. En este trabajo, la explotación de los cambios entre cuadros o de cambios del punto de vista dentro de un mismo cuadro juega un papel clave. Todo esto requiere que el profesor esté en condiciones que le permitan asegurar la devolución del problema y, por lo tanto, la entrada de los estudiantes en una interacción directa con el problema. El papel del profesor no es ejercer la autoridad sino más bien ser un compañero científico. Sin embargo, esto no siempre es posible. Los estudios de A. Robert, J. Robinet y otros investigadores han mostrado la importancia de hacer explícitas y explotar las creencias o posiciones metacognitivas del profesor, y del uso de un discurso sobre las matemáticas para facilitar el acceso a ciertos conceptos o a ciertos dominios matemáticos.

Sin embargo, admitamos que esta etapa se realizó y que los estudiantes efectivamente trabajaron en el problema y produjeron los resultados esperados en el problema. Al profesor le falta todavía enfrentar la descontextualización y la despersonalización de algunos elementos que él escogió por razones asociadas con sus intenciones de enseñanza y con los comportamientos de los estudiantes frente al problema que les propuso. Dicho de otro modo, el profesor debe institucionalizar algunos elementos: las nociones, métodos, y la práctica basada en las realizaciones de los estudiantes. Pero otra vez en esta etapa, surgen grupos de estudiantes para quienes la relación entre estas dos etapas no son evidentes: trabajar en un problema no implica que se haga algo más tarde con ese trabajo. Por lo tanto, esta relación es una condición necesaria para que la situación de investigación en la cual un estudiante se involucró efectivamente tenga una función de aprendizaje para ese estudiante.

A lo largo de las experiencias didácticas que se realizaron con M.J. Perrin, pudimos notar situaciones particularmente interesantes para favorecer las relaciones necesarias que se mencionaron antes. Estas son las *situaciones de recuerdo*. Se denomina con este término al momento en el comienzo de una sesión donde el profesor pide a los estudiantes *acordarse* de los puntos esenciales de las sesiones anteriores sobre un tema determinado que todavía está en curso. Aquí se establece un control mutuo entre los estudiantes. El profesor repite algunas preguntas, de vez en cuando formula unas nuevas, retoma las informaciones expresadas, pero él en sí no aporta ninguna. Esta es una fase clave en la selección y memorización de los eventos importantes pues se establece la relación con las clases anteriores, se comienza a descontextualizar y a despersonalizar aquellas cosas que el profesor institucionalizará posteriormente. En efecto, la práctica de los recuerdos bajo la responsabilidad de los estudiantes es una situación interesante de instituir ya que el trabajo que se realice durante cada sesión se va a ubicar en relación con el trabajo, preguntas y resultados obtenidos con anterioridad. Así, cada estudiante sabe que debe retener los puntos esenciales de la evolución de una sesión como previsión para la siguiente. De hecho, las situaciones son a menudo complejas y un estudiante no puede llenar por sí solo el contrato. Pero el conjunto de los estudiantes de una clase sí puede hacerlo.

Hay que recalcar que si el profesor es impaciente o exigente con los recuerdos y él mismo reafirma su función, entonces los recuerdos se reafirman de manera conveniente; sin embargo, la situación no cumple con su papel didáctico para los estudiantes. Ella no va a participar en la descontextualización y despersonalización necesarias. Ya no es una presión para que los alumnos consideren el estudio del problema como una parte del proceso de aprendizaje.

Para concluir, enumeremos los objetivos centrales que M.J. Perrin enunció en la secuencia de su trabajo con estudiantes de sectores populares:

- Hacer la devolución de un juego general a través de juegos más puntuales
- Favorecer la creación de representaciones mentales de la acción que permitan el inicio de la descontextualización, y por esto dar a los estudiantes muchas oportunidades de construir tales representaciones
- Favorecer el trabajo personal del estudiante y en especial el trabajo en casa, y para esto, hacerlo de modo que sean capaces de utilizar el manual
- Hacer posibles y desarrollar formas de comunicación y de interacción entre los estudiantes en el trabajo colectivo o grupal
- Hacer evolucionar su relación con la evaluación para hacerla más compatible con un trabajo científico

Como se puede constatar, algunos de estos objetivos se han tratado de forma adecuada en la ingeniería presentada. Otra, como el trabajo en casa y el uso de manuales, se pueden integrar en el transcurso de la ingeniería.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308.

Bautier, E., & Robert, A. (1988). Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de pédagogie, 84,* 13-19.

Brousseau, G. (1987). Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2),* 33-115.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309-336.

Charlot, B., & Bautier, E. (1993). Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des Mathématiques. *Repères IREM.* nº 10.

Douady, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Cahier de Didactique nº 3*.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2),* 5-32.

Douady, R., & Perrin-Glorian, M. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 387-424.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères - IREM.* nº 6.

Perrin-Glorian, M.J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes "faibles". *Recherches en Didactique des Mathématiques, 13*(1).

Robert, A., & Robinet, J. (1989). Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier de DIDIREM.* nº 1.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2.3).